VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

MATEMATIKA I

MODUL 7

NEURČITÝ INTEGRÁL

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Typeset by $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Obsah

1 Úvod **4**
- 1.1 Cíle modulu. 4
- 1.2 Požadované znalosti. 4
- 1.3 Doba potřebná ke studiu. 4
- 1.4 Klíčová slova. 5

2 Základní pojmy. **6**

3 Základní integrační metody. **11**

4 Integrace racionálních funkcí. **15**

5 Integrace goniometrických funkcí. **20**
- 5.1 První typ 20
- 5.2 Druhý typ 22
- 5.3 Třetí typ 23

6 Integrace iracionálních funkcí. **23**
- 6.1 První typ 24
- 6.2 Druhý typ 25

7 Kontrolní otázky. **31**

8 Autotest. **32**

9 Výsledky cvičení a autotestu. **32**

10 Studijní prameny. **36**

A Vzorová zadání kontrolních testů. **37**

1 Úvod

1.1 Cíle modulu.

Odstavec 2. Porozumět pojmům primitivní funkce a neurčitý integrál, uvědomit si, že primitivní funkce byly definovány na otevřených intervalech. Znát základní vlastnosti neurčitého integrálu. Po prostudování byste měli být schopni nalézt po úpravách primitivní funkce k různým jednoduchým funkcím, určit obory platnosti a zkontrolovat si derivováním správnost výsledku integrování.

Odstavec 3. Dobrá znalost tabulky primitivních funkcí a oborů platnosti je nezbytnou podmínkou pro zvládání dalšího textu. Po prostudování byste měli umět rozpoznat, kdy je vhodné pro výpočet integrálu použít metodu per partes, kdy a jakou substituční metodu a správnou volbou složek nebo substituce jej vyřešit. K získání této schopnosti je nezbytné si vyřešit dostatečné množství příkladů, což ostatně platí pro všechny odstavce tohoto modulu.

Odstavec 4. Po prostudování byste měli umět zintegrovat parciální zlomky, které odpovídají jednonásobným nebo vícenásobným reálným kořenům jmenovatele racionální funkce a dvojicím jednonásobných komplexně sdružených kořenů. Seznámíte se také s rekurentním vzorcem a s výpočtem integrálů parciálních zlomků, odpovídajících dvojici vícenásobných komplexně sdružených kořenů.

Odstavec 5. Naučíte se, jak volit substituce, abyste převedli integrály některých goniometrických funkcí na racionální funkce. Měli byste umět použít tyto jednotlivé goniometrické substituce. Na základě znalostí vztahů mezi goniometrickými funkcemi umět vypočítat integrály ze součinů funkcí sinus a kosinus různých argumentů.

Odstavec 6. Seznámíte se s tím, jak můžete racionalizovat některé integrály obsahující odmocniny. Je zapotřebí umět tyto substituce správně určit a jejich použitím převést integrand na racionální funkci. Připomeneme si, že pro výpočet některých typů integrálů obsahujících odmocniny můžete použít 1. substituční metodu nebo metodu per partes. Také tyto početní postupy musíte zvládnout.

1.2 Požadované znalosti.

Dobře ovládat derivování funkcí, rozklady racionálních funkcí na parciální zlomky, znát základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi.

1.3 Doba potřebná ke studiu.

Přibližně lze odhadnout potřebnou dobu ke studiu jednorozměrného integrálu na 15 hodin. Pro získání zkušeností a zručnosti ve výpočtu primitivních funkcí bude ještě zřejmě zapotřebí další čas závislý na dosavadní početní praxi studenta.

1.4 Klíčová slova.

Primitivní funkce, neurčitý integrál, vlastnosti neurčitého integrálu, metoda per partes, první a druhá substituční metoda, integrace racionální funkce, integrace goniometrických funkcí, integrace iracionálních funkcí.

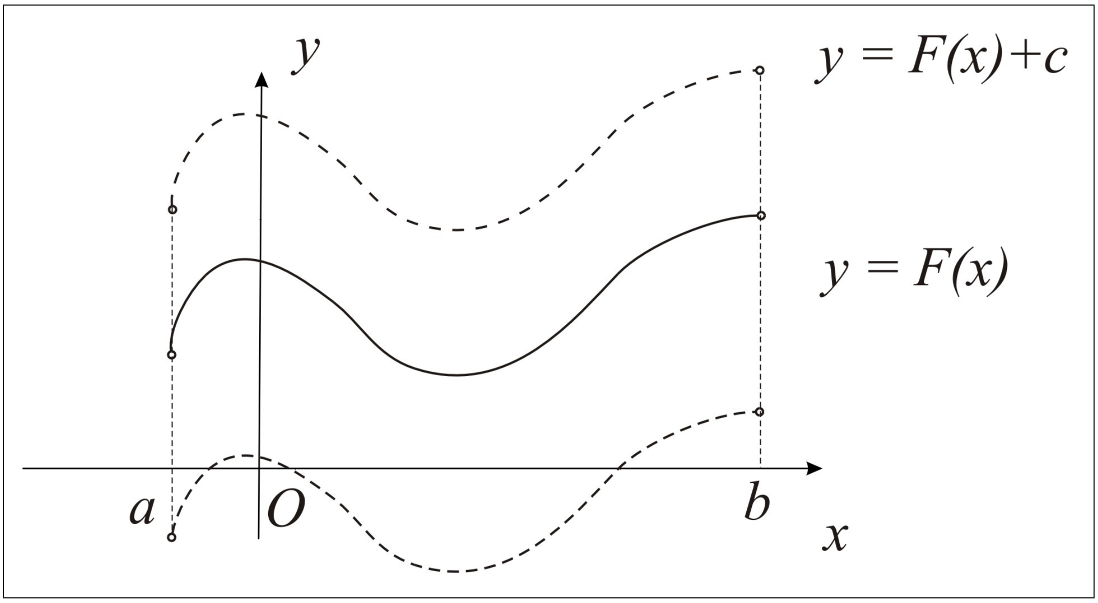
2 Základní pojmy.

Definice 2.1. *Řekneme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, jestliže pro každé $x \in I$ platí*

$$F'(x) = f(x).$$

Poznámka 2.1.

(a) Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na otevřeném intervalu I. Potom funkce $F_c(x) = F(x) + c$, $x \in I$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je také primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.



Obrázek 1: Nejednoznačnost existence primitivní funkce.

(b) Pro libovolný bod $x_0 \in I$ a každé $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje jedna primitivní funkce F k funkci f na I, pro kterou platí $F(x_0) = y_0$ (graf funkce F prochází bodem $[x_0, y_0]$).

(c) Funkce F je spojitá na intervalu I.

Poznámka 2.2. Jsou-li F, G primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I, pak existuje takové číslo $c \in \mathbb{R}$, že platí $G(x) = F(x) + c$ na I. Množinu všech těchto primitivních funkcí obvykle nazýváme neurčitým integrálem funkce f na I a značíme jej $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka 2.3. V literatuře je možné se také setkat s definicí primitivních funkcí na obecnějších množinách, nežli jsou intervaly (např. sjednocení intervalů). Tato obecnější definice však má některé nevýhody (např. primitivní funkce se nemusí lišit o konstantu).

V dalším textu se seznámíme s různými metodami výpočtu primitivních funkcí. Je vhodné si ale uvědomit, že i když nám následující Věta 2.1 zaručuje existenci primitivní funkce ke každé spojité funkci na otevřeném intervalu, přesto se v aplikačních úlohách vyskytují takové spojité funkce na intervalu, k nimž neexistují primitivní funkce, které se dají vyjádřit jako konečné lineární kombinace funkcí složených z elementárních funkcí. Patří k nim např.

$$\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sin x^2\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x,$$

kde $0 < k < 1$, apod. Říkáme pak často, že tyto integrály jsou tzv. neelementární.

Věta 2.1. *Každá funkce spojitá na otevřeném intervalu I má na tomto intervalu primitivní funkci.*

Příklad 2.1. Ukážeme příklad konstrukce primitivní funkce F k funkci f v intervalu $(0,2)$. Funkce f je dána takto:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1]\,, \\ 1, & x \in (1,2)\,. \end{cases}$$

Podle Věty 2.1 primitivní funkce existuje. Zvolme primitivní funkce v jednotlivých intervalech takto:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad x \in (0,1)\,, \qquad F_2(x) = x + d, \quad x \in (1,2)\,,$$

kde d je konstanta. Protože funkce F musí být spojitá, zvolíme konstantu d tak, aby

$$\lim_{x\to 1+} F_2(x) = \lim_{x\to 1-} F_1(x) = \frac{1}{2}.$$

Odtud $d = -1/2$. Tedy celkem

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2, & x \in (0,1]\,, \\ x - \dfrac{1}{2}, & x \in (1,2)\,. \end{cases}$$

Přitom

$$F'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x-1} = 1, \quad F'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x-1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1-}(x+1) = 1.$$

Vidíme tedy, že funkce F je spojitá v bodě 1 a $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (0,2)$. Je tedy funkce F primitivní k funkci f na $(0,2)$.
Grafy funkcí f a F jsou znázorněny na obrázku 2.

Poznámka 2.4. Funkce g definovaná na intervalu $(0,2)$ takto

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1]\,, \\ 2, & x \in (1,2)\,, \end{cases}$$

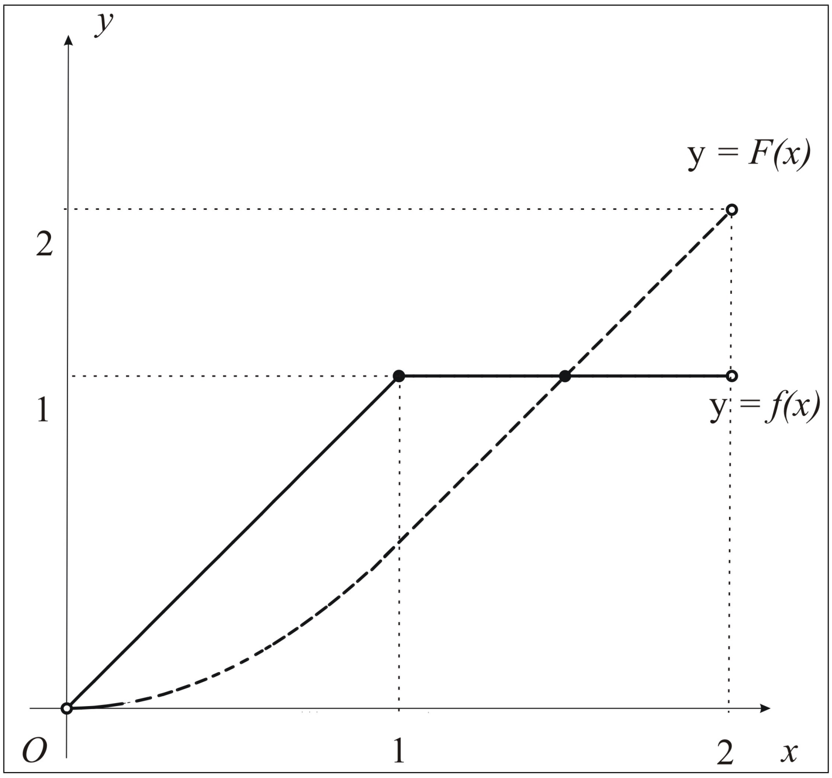
nemá na tomto intervalu primitivní funkci ve smyslu naší definice.

Poznámka 2.5. Existují však i nespojité funkce, k nimž je možno nalézt primitivní funkce.

Věta 2.2. *Jestliže existují primitivní funkce k funkcím f a g na otevřeném intervalu I, pak platí*

$$\begin{aligned} \int cf(x)\,\mathrm{d}x &= c\int f(x)\,\mathrm{d}x, \\ \int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

kde $c \neq 0$ je libovolná reálná konstanta.



Obrázek 2: Příklad 2.1.

Poznámka 2.6. Zobrazení $A\ f \to \int f\,\mathrm{d}x$ je lineární zobrazení lineárního prostoru $C^0(I)$ do lineárního prostoru $C^1\,(I)$. Toto tvrzení plyne z Věty 2.2.

Tabulkové integrály.

Z tabulky derivací dostáváme okamžitě tabulku primitivních funkcí. V následujících vzorcích je $c \in \mathbb{R}$ libovolná konstanta:

$$
\begin{aligned}
\int x^n\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\\
\int x^\alpha\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad x \in (0,\infty),\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1,\\
\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \ln|x| + c, \quad x \in (0,\infty) \text{ nebo } x \in (-\infty,0),\\
\int a^x\,\mathrm{d}x &= \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1 \text{ je konstanta},\\
\int \sin x\,\mathrm{d}x &= -\cos x + c, \quad x \in \mathbb{R},\\
\int \cos x\,\mathrm{d}x &= \sin x + c, \quad x \in \mathbb{R},\\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\cot x + c, \quad x \in (k\pi,(k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z},\\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \operatorname{tg} x + c, \quad x \in ((2k-1)\pi/2,(2k+1)\pi/2),\ k \in \mathbb{Z},\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \arcsin x + c, \quad x \in (-1,1),\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \operatorname{arctg} x + c, \quad x \in \mathbb{R},\\
\int \sinh x\,\mathrm{d}x &= \cosh x + c, \quad x \in \mathbb{R},\\
\int \cosh x\,\mathrm{d}x &= \sinh x + c, \quad x \in \mathbb{R},\\
\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \tanh x + c, \quad x \in \mathbb{R},\\
\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\coth x + c, \quad x \in (0,\infty) \text{ nebo } x \in (-\infty,0).
\end{aligned}
$$

Poznámka 2.7. (k druhému vzorci v předešlé tabulce - možnost rozšíření integračních oborů)
Je-li $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq -1$, p, q nesoudělná, pak

(a)

$$\text{je-li } \alpha > 0 \text{ a } \begin{cases} q \text{ sudé, pak } x \in (0, \infty), \\ q \text{ liché, pak } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

(b)

$$\text{je-li } \alpha < 0 \text{ a } \begin{cases} q \text{ sudé, pak } x \in (0, \infty), \\ q \text{ liché, pak } x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

Příklad 2.2. Hmotný bod koná přímočarý pohyb takový, že jeho zrychlení roste rovnoměrně s časem a za prvních $10\,s$ pohybu naroste z nulové hodnoty na $5\,m \cdot s^{-2}$. Jaká je rychlost pohybu hmotného bodu v čase $t = 10\,s$ a jakou dráhu hmotný bod vykonal, jestliže v čase $t = 0$ byl v klidu?

Řešení. Zřejmě pro zrychlení a platí $a = kt$, kde $k = a_{10}/t_{10} = 1/2\,m \cdot s^{-3}$. Odtud

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}kt^2 + c.$$

Protože $v(0) = 0$ dostáváme, že $c = 0$. Odtud $v(10) = 25\,m \cdot \cdot \cdot^{-1}$. Pro dráhu s máme

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}kt^3 + d.$$

Vzhledem k tomu, že $s(0) = 0$ dostáváme, že $d = 0$ a tedy $s(10) = 83.33\,m$.

Cvičení 2.1. Užitím základních vztahů spočtěte dané integrály na daných oborech:

a) $\displaystyle\int \left(x^3 - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt[4]{x}}{2} + \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \mathrm{d}x \quad \text{na } (0, \infty)\,;$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^2 - 1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (0, \infty)\,;$

c) $\displaystyle\int \frac{x - 1}{1 + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (0, \infty)\,;$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right);$

e) $\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R};$

f) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\,x\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$

3 Základní integrační metody.

Věta 3.1. *(První substituční metoda.) Nechť funkce f má primitivní funkci F na otevřeném intervalu J. Nechť funkce φ zobrazuje otevřený interval I do J a má na intervalu I konečnou derivaci. Potom $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ na intervalu I a platí*

$$\int f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)\mathrm{d}t = F\left(\varphi\left(t\right)\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Plyne přímo z věty o derivaci složené funkce.

Příklad 3.1. Vypočtěte primitivní funkci k dané funkci $g(t)$ na daném intervalu:

a) $g\left(t\right) = t\cos(t^2+1)$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Daná funkce je spojitá na $\mathbb{R}$ a podle Věty 2.1 existuje primitivní funkce.

$$\begin{aligned}\int t\cos\left(t^2+1\right)\mathrm{d}t &= \left|\begin{array}{rcl} t^2+1 &=& x \\ 2t\,dt &=& \mathrm{d}x \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\sin x + c = \frac{1}{2}\sin\left(t^2+1\right) + c.\end{aligned}$$

b) $g\left(t\right) = \dfrac{t}{3+2t^4}$ na $\mathbb{R}$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{3+2t^4}\mathrm{d}t &= \left|\begin{array}{rcl} t^2 &=& u \\ 2t\mathrm{d}t &=& \mathrm{d}u \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2u^2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{3}}\right)^2}\mathrm{d}u = \left|\begin{array}{rcl} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u &=& x \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\mathrm{d}u &=& \mathrm{d}x \end{array}\right| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg} x + c \\ &= \frac{\sqrt{6}}{12}\operatorname{arctg}\frac{t^2\sqrt{6}}{3} + c.\end{aligned}$$

Věta 3.2. *(Druhá substituční metoda.) Nechť funkce φ zobrazuje otevřený interval I na interval J a nechť má konečnou derivaci $\varphi' \neq 0$ na I. Je-li G primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ na I, pak funkce $G \circ \varphi^{-1}$ je primitivní k f na J a platí*

$$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + c = G\left(\varphi^{-1}(x)\right) + c.$$

Důkaz. Z předpokladu, že $\varphi' \neq 0$ plyne, že funkce φ je spojitá a $\varphi' > 0$ nebo $\varphi' < 0$. Z tohoto dostáváme, že funce φ je ryze monotonní a existuje tedy inverzní funkce φ^{-1}, která je spojitá a má konečnou derivaci. Pro libovolné $x \in J$ tedy platí

$$\begin{aligned} \left(G\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)' &= G'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\left(\varphi^{-1}(x)\right)' = G'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f\left(\varphi(t)\right) = f(x). \end{aligned}$$

Příklad 3.2. Vypočtěte primitivní funkci k funkci $\sqrt{1-x^2}$ na intervalu $J = (-1, 1)$.

Řešení. Položme $\varphi(t) = \sin t$, $I = (-\pi/2, \pi/2)$, $\varphi : (-\pi/2, \pi/2) \to (-1, 1)$, $\varphi' \neq 0$ na J.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{rcl} x &=& \sin t = \varphi(t) \\ t &=& \arcsin x = \varphi^{-1}(t) \\ dx &=& \cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \int |\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(t + \sin t\cos t\right) = \frac{1}{2}\left(t + \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + c. \end{aligned}$$

Věta 3.3. *(Metoda per partes.) Nechť funkce u, v mají spojité derivace na otevřeném intervalu I. Potom na I platí*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x).$$

Důkaz. Plyne z věty o derivaci součinu funkcí a definice primitivní funkce.

Příklad 3.3. Vypočtěte primitivní funkci k dané funkci na daném intervalu:

(a) $f(x) = xe^x$ na $\mathbb{R}$.

Řešení.

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u(x) = x & v'(x) = e^x \\ u'(x) = 1 & v(x) = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x-1)\,e^x + c.$$

(b) $f(x) = \ln x$ na $(0, \infty)$.

Řešení.

$$\int \ln\, x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v'(x) = 1 \\ u'(x) = 1/x & v(x) = x \end{array} \right| = x \ln\, x - \int \mathrm{d}x = x\,(\ln\, x - 1) + c.$$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x^2}$ na $(0, \infty)$.

Řešení.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \left| \begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \ln^2 x, & v'(x) & = & \frac{1}{x^2} \\ u'(x) & = & \frac{2\ln x}{x}, & v(x) & = & -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln^2 x}{x} + 2I,$$

kde

$$\begin{aligned} I \;&=\; \int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \ln x, & v'(x) & = & \frac{1}{x^2} \\ u'(x) & = & \frac{1}{x}, & v(x) & = & -\frac{1}{x} \end{array} \right| \\ &=\; -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\ln x + 1}{x} + c. \end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x} + c, \qquad x \in \mathbb{R}^+.$$

(d) $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} \int x^3 \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x \;&=\; \left| \begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \operatorname{arctg} x, & v'(x) & = & x^3 \\ u'(x) & = & \frac{1}{1+x^2}, & v(x) & = & \frac{1}{4}x^4 \end{array} \right| \\ &=\; \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4}\int \frac{(x^4-1)+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &=\; \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4}\int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &=\; \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x\right) \\ &=\; \frac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} + c. \end{aligned}$$

Příklad 3.4. Vypočtěte integrál
$$I = \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Řešení.
$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{ll} u(x) = e^x & v'(x) = \sin x \\ u'(x) = e^x & v(x) = -\cos x \end{array} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{ll} u(x) = e^x & v'(x) = \cos x \\ u'(x) = e^x & v(x) = \sin x \end{array} \right| = e^x(-\cos x + \sin x) - \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$
Tedy
$$I = e^x(\sin x - \cos x) - I,$$
a odtud pro $x \in \mathbb{R}$
$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 3.1. Analogickým způsobem lze počítat integrály
$$\int e^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x, \quad \int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R},$$
kde a, b jsou libovolné reálné konstanty.

Příklad 3.5. Kombinací *první substituční metody* a *metody per partes* vypočítejte integrály
$$I = \int x^5 \, e^{x^2} \, \mathrm{d}x, \quad J = \int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Řešení.
$$\begin{aligned}
I &= \left| \begin{array}{rcl} x^2 &=& t \\ 2x\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int t^2 \, e^t \, \mathrm{d}t \\
&= \left| \begin{array}{rclrcl} u(t) &=& t^2, & v'(t) &=& e^t \\ u'(t) &=& 2t, & v(t) &=& e^t \end{array} \right| = \frac{t^2 \, e^t}{2} - \int t \, e^t \, \mathrm{d}t \\
&= \left| \begin{array}{rclrcl} u(t) &=& t, & v'(t) &=& e^t \\ u'(t) &=& 1, & v(t) &=& e^t \end{array} \right| = \frac{t^2 \, e^t}{2} - t \, e^t + \int e^t \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{e^{x^2} \, (x^4 - 2x^2 + 2)}{2} + c;
\end{aligned}$$

$$J = \left| \begin{array}{rclrcl} u(x) &=& \operatorname{arctg} x, & v'(x) &=& 1 \\ u'(x) &=& \dfrac{1}{1+x^2}, & v(x) &=& x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - J_1,$$

kde

$$J_1 = \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} 1+x^2 & = & t \\ x\ \mathrm{d}x & = & \frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.$$

Celkem tedy

$$\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.$$

Cvičení 3.1. Užitím substitučních metod spočtěte dané integrály na daných oborech:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3-4x}\ \mathrm{d}x \quad \text{na } \left(\frac{3}{4},\infty\right);$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\ \mathrm{d}x \quad \text{na } \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right);$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{5+x^2}}\ \mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R};$

d) $\displaystyle\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x \quad \text{na } (-1,1);$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+29}\ \mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R};$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}\ \mathrm{d}x \quad \text{na } (-5,1).$

Cvičení 3.2. Užitím metody per partes spočtěte dané integrály na daných oborech:

a) $\displaystyle\int x\cos(4x+3)\ \mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R};$

b) $\displaystyle\int x\sin^2 x\ \mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R};$

c) $\displaystyle\int \log x\ \mathrm{d}x \quad \text{na } (0,\infty);$

d) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} 3x\ \mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R};$

e) $\displaystyle\int e^{2x}\cos 5x\ \mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R};$

f) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^3}\ \mathrm{d}x \quad \text{na } (0,\infty).$

4 Integrace racionálních funkcí.

Jak již víme z teorie racionálních funkcí, můžeme zadanou ryzí racionální funkci *rozložit na parciální zlomky tvaru*

$$(I)\quad \frac{A}{(ax+b)^l} \qquad (II)\quad \frac{Bx+C}{(px^2+qx+r)^k}$$

kde $k,\ l \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $p \neq 0$, $q^2 - 4pr < 0$, $A \neq 0$ a $B^2 + C^2 \neq 0$. Je zřejmé, že pro integraci parciálních zlomků typu (I) můžeme použít substituci $ax + b = t$, která převede tento typ na tabulkový integrál $\int t^{-l}\, dt$.

Příklad 4.1.

$$\int \frac{1}{(3x+4)^5}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} 3x+4 & = & t \\ 3\,\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^5}\,dt = -\frac{1}{12\,(3x+4)^4} + c,$$

kde $x \in (-\infty, -4/3)$ nebo $x \in (-4/3, \infty)$.

Integrace parciálních zlomků tvaru (II) je již trošku náročnější. Nejprve se budeme zabývat případem, kdy $k = 1$. Pak je vhodné upravit integrand na tvar

$$K\frac{f'(x)}{f(x)} + L\frac{1}{f(x)},$$

který již snadno integrujeme pomocí první substituční metody.

Příklad 4.2. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x}{x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrovaná funkce je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $x^2 + 3x + 3 > 0$ na $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+3) - \frac{3}{2}}{x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}I_1 - \frac{3}{2}I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \begin{array}{rcll} x^2+3x+3 & = & t, & t>0 \\ (2x+3)\mathrm{d}x & = & \mathrm{d}t & \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln t = \ln(x^2+3x+3), \\ I_2 &= \int \frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int \frac{1}{(\frac{2x+3}{\sqrt{3}})^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \frac{2x+3}{\sqrt{3}} & = & t \\ \mathrm{d}x & = & \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t \end{array} \right| \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Celkem
$$\frac{1}{2}I_1 - \frac{3}{2}I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2+3x+3) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+3}{\sqrt{3}} + c,$$
kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolné.

Příklad 4.3.
$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{9x^2+6x+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{9}\int \frac{18x+6}{9x^2+6x+5}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{9x^2+6x+5}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{9}I_1 + \frac{1}{3}I_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \left|\begin{array}{rcl} 9x^2+6x+5 &=& t\\ (18x+6)\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t\end{array}\right| = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + c_1 = \ln(9x^2+6x+5) + c_1\\ I_2 &= \int \frac{1}{(3x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} 3x+1 &=& t\\ 3\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t\end{array}\right| = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3x+1}{2} + c_2.\end{aligned}$$

Celkem dostáváme
$$\int \frac{2x+1}{9x^2+6x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\ln(9x^2+6x+5) + \frac{1}{18}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3x+1}{2} + c.$$

Zbývá nám integrace parciálních zlomků tvaru
$$\frac{Bx+C}{(px^2+qx+r)^k}, \qquad k > 1,\ k \in \mathbb{N}.$$
Nejdříve upravíme integrand na tvar
$$K\frac{f'(x)}{(f(x))^k} + L\frac{1}{(f(x))^k}.$$
První sčítanec integrujeme podle první substituční metody, ve druhém sčítanci upravíme výraz $1/\left(f(x)\right)^k$ *na tvar* $1/\left(t^2+a^2\right)^k$ *a primitivní funkci určíme užitím rekurentního vztahu*
$$\int \frac{1}{(t^2+a^2)^{k+1}}\,dt = \frac{1}{2ka^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^k} + (2k-1)\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\,dt\right).$$
Nyní si tento rekurentní vztah odvodíme užitím metody per partes. Označme
$$\boxed{J_k = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\,dt.}$$

$$
\begin{aligned}
J_k &= \left| \begin{array}{rclrcl} u(x) &=& \dfrac{1}{(t^2+a^2)^k} & v'(t) &=& 1 \\ u'(x) &=& -\dfrac{2kt}{(t^2+a^2)^{k+1}} & v(t) &=& t \end{array} \right| \\
&= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\, dt \\
&= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}\, dt \\
&= \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\, dt - 2ka^2 \int \frac{1}{(t^2+a^2)^{k+1}}\, dt
\end{aligned}
$$

a odtud dostáváme rovnici

$$
\boxed{J_k = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2kJ_k - 2ka^2 J_{k+1}.}
$$

Příklad 4.4. Vypočtěte integrál

$$
\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (1,\infty).
$$

Řešení.

$$
\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(I_1 - I_2)
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left| \begin{array}{rcll} x-1 &=& t, & t>0 \\ \mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t & \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln t = \ln(x-1), \\
I_2 &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}J_1 + \frac{3}{2}J_2 \\
J_1 &= \left| \begin{array}{rcl} x^2+x+1 &=& t \\ (2x+1)\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln t = \ln(x^2+x+1) \\
J_2 &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} &=& t \\ \mathrm{d}x &=& \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c
\end{aligned}
$$

Celkem tedy

$$
\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt[3]{x-1} - \ln\sqrt[6]{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c
$$

pro $x \in (1,\infty)$.

Příklad 4.5.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{\left(4x^2-4x+3\right)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{8x-4}{\left(4x^2-4x+3\right)^2}\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{\left((2x-1)^2+2\right)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}I_1 + 4I_2,\end{aligned}$$

$$I_1 = \left|\begin{array}{rcl} 4x^2-4x+3 &=& t\\ (8x-4)\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t\end{array}\right| = \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} + c_1 = -\frac{1}{4x^2-4x+3} + c_1$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \frac{1}{\left((2x-1)^2+2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} 2x-1 &=& t\\ 2\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(t^2+2\right)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t}{4\left(t^2+2\right)} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c_2\\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{2x-1}{4x^2-4x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + c_2.\end{aligned}$$

Závěrem máme

$$\int \frac{2x+3}{\left(4x^2-4x+3\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4x-3}{4\left(4x^2-4x+3\right)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{2}} + c.$$

Cvičení 4.1. Spočtěte dané integrály na daných oborech:

a) $\displaystyle\int \frac{4x-1}{x^2+5x+7}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R};$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (-2,1)\,;$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4-6x^2+x-2}{x^4-2x^3}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (0,2)\,;$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (0,\infty)\,;$

e) $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+4}{x^3-2x^2+2x}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (-\infty,0)\,;$

f) $\displaystyle\int \frac{5\ln x+3}{x\left(\ln^2 x-\ln x+1\right)}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (0,\infty)\,.$

5 Integrace goniometrických funkcí.

Zavedeme nejprve pojem polynomu n proměnných:

$$P(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n},$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \in \mathbb{R}$, k_i, m_i jsou celá nezáporná čísla.

$$R(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{P(u_1, u_2, \dots, u_n)}{Q(u_1, u_2, \dots, u_n)}$$

je racionální funkce n proměnných.

Rozlišíme tři základní typy integrálů.

5.1 Typ $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Nechť

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$$

je racionální funkce dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$.

Integraci funkcí tohoto typu lze převést na integraci funkcí racionálních v proměnné t zavedením následujících substitucí:

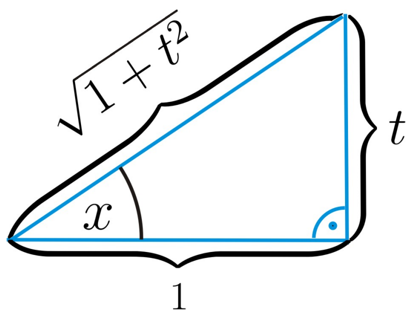
1) *Platí-li* $R(-u, v) = -R(u, v)$, *položíme* $\cos x = t$.

2) *Platí-li* $R(u, -v) = -R(u, v)$, *položíme* $\sin x = t$.

3) *Platí-li* $R(-u, -v) = R(u, v)$, *položíme* $\operatorname{tg} x = t$.

4) *V ostatních případech položíme* $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Při zavedení substituce $\operatorname{tg} x = t$ využijeme tyto vztahy (pro lehké zapamatování je můžeme získat z následujícího obrázku:)



$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Při substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\\
\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}.
\end{aligned}
$$

Příklad 5.1. Vypočtěte primitivní funkci k funkci

$$\frac{\cos^3 x}{1+4\sin^2 x}$$

na intervalu $\mathbb{R}$.
Řešení.

$$R(u,-v) = \frac{(-v)^3}{1+4u^2} = -\frac{v^3}{1+4u^2} = -R(u,v).$$

Zvolíme substituci $\sin\, x = t$.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{1+4\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{rcl} \sin\, x &=& t\\ \cos\, x\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{1+4t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4}\int \left(-1+\frac{5}{1+4t^2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(-t+\frac{5}{2}\,\mathrm{arctg}\ 2t\right)+c\\
&= \frac{1}{4}\left(-\sin\, x+\frac{5}{2}\,\mathrm{arctg}(2\sin\, x)\right)+c.
\end{aligned}
$$

Příklad 5.2. Vypočtěte primitivní funkci k funkci

$$\frac{1}{4\sin^2\, x - 4\sin\, x\cos\, x + 7\cos^2 x}$$

na intervalu $(0,\pi/2)$.
Řešení.

$$R(-u,-v) = \frac{1}{4(-u)^2-4(-u)(-v)+7(-v)^2} = \frac{1}{4u^2-4uv+7v^2} = R(u,v).$$

Zvolíme substituci $\mathrm{tg}\ x = t$.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{4\sin^2\, x - 4\sin\, x\cos\, x + 7\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\
&= \left| \begin{array}{rclrcl} \mathrm{tg}\ x &=& t & \sin\, x &=& \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\\ x &=& \mathrm{arctg}\ t\,\mathrm{d}t & \cos\, x &=& \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\\ \mathrm{d}x &=& \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t & & & \end{array} \right|\\
&= \int \frac{1}{\left(4\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}+7\frac{1}{1+t^2}\right)}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int\frac{1}{4t^2-4t+7}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(2t-1)^2+6}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\sqrt{6}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{6}}+c = \frac{1}{2\sqrt{6}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\ x-1}{\sqrt{6}}+c
\end{aligned}
$$

Příklad 5.3. Vypočtěte primitivní funkci k funkci

$$\frac{1}{4 - 5\sin x}$$

na intervalu $(0, \pi/4)$.
Řešení. Zvolíme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{4 - 5\sin x}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{rclrcl} \operatorname{tg}\frac{x}{2} &=& t & \sin x &=& \frac{2t}{1+t^2} \\ x &=& 2\operatorname{arctg} t & \cos x &=& \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x &=& \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t & & & \end{array} \right| \\
&= \int \frac{2}{\left(4 - \frac{10t}{1+t^2}\right)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2t^2 - 5t + 2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{2}{2t-1}\right)\mathrm{d}t + c = \frac{1}{3}\left(\ln|t-2| - \ln|2t-1|\right) + c \\
&= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}\right| + c.
\end{aligned}$$

5.2 Typ $\int \sin\alpha x \sin\beta x \,\mathrm{d}x$.

Nechť α, $\beta \in \mathbb{R}$. K výpočtu integrálů

$$\int \sin\alpha x \sin\beta x\, dx, \quad \int \sin\alpha x \cos\beta x\, dx, \quad \int \cos\alpha x \cos\beta x\, dx.$$

použijeme vzorce

$$\begin{aligned}
\sin\alpha x \sin\beta x &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right], \\
\cos\alpha x \cos\beta x &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right], \\
\sin\alpha x \cos\beta x &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right].
\end{aligned}$$

Příklad 5.4. Vypočtěte primitivní funkci k funkci $\sin 3x \cos 2x$ na $\mathbb{R}$.
Řešení. Použijeme vzorec

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right].$$

$$\int \sin 3x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + c.$$

5.3 Typ $\int \sin^m x \cos^n x \,\mathrm{d}x$.

Nechť m, n jsou celá nezáporná a sudá čísla. Pro výpočet integrálu

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

použijeme vzorce

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x\,.$$

Příklad 5.5. Vypočtěte primitivní funkci k funkci $\sin^4 x \cos^2 x$ na $\mathbb{R}$.
Řešení.

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\int (1-\cos 2x - \cos 4x + \cos 4x \cos 2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\left(\int dx - \int \cos 4x \, dx - \int \cos 2x \,\mathrm{d}x + \int \cos 4x \cos 2x \, dx\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x\right) + c \\
&= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x\right) + c.
\end{aligned}$$

Cvičení 5.1. Spočtěte dané integrály na daných oborech:

a) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$;

b) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x \cos x}{1 + 2\cos x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ na $(-\pi, \pi)$;

c) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x}\,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$;

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$;

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x$ na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 5}\,\mathrm{d}x$ na $\mathbb{R}$.

6 Integrace iracionálních funkcí.

Opět odlišíme dva základní typy integrálů iracionálních funkcí.

6.1 Typ $\int R\left(x, \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$.

Nechť R je racionální funkce $m+1$ proměnných. Uvažujme funkci

$$R\left(x, \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

kde a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, přičemž $ad - bc \neq 0$.

Integraci funkcí tohoto typu lze převést na integraci funkcí racionálních v proměnné t. Vyjdeme-li ze vztahu

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

kde s je nejmenší společný násobek čísel q_1, q_2,…,q_m, dostaneme

$$x = \frac{dt^s - b}{a - ct^s}.$$

Příklad 6.1. Vypočtěte primitivní funkci k funkci

$$\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}$$

na intervalu $(1, \infty)$.
Řešení.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{rclrcl} \frac{4x+1}{x-1} &=& t^2 & x &=& \frac{t^2+1}{t^2-4} \\ \mathrm{d}x &=& \frac{-10t}{(t^2-4)^2}\mathrm{d}t & & & \end{array} \right| \\
&= -10\int \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-4)}\,\mathrm{d}t = 2\int \left(-\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\; t + c \\
&= 2\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}+2}{\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}-2}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}} + c.
\end{aligned}$$

Příklad 6.2. Vypočtěte primitivní funkci k funkci

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x\sqrt[4]{x} + x\sqrt[3]{x}}$$

na intervalu $(0, \infty)$.

Řešení.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[4]{x}+x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{rcl} x &=& t^{12}\\ \mathrm{d}x &=& 12t^{11}\,\mathrm{d}t\end{array}\right| = 12\int \frac{t^6-t^4}{t^{15}+t^{16}}t^{11}\,\mathrm{d}t = 12\int \frac{t^2-1}{t+1}\,\mathrm{d}t\\ &= 12\int (t-1)\,\mathrm{d}t = 6t^2-12t+c = 6\sqrt[6]{x}-12\sqrt[12]{x}+c.\end{aligned}$$

6.2 Typ $\int R(x, \sqrt{px^2+qx+r})\,\mathrm{d}x$.

Nechť

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$$

je racionální funkce dvou proměnných u, v a p, q, $r \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$. Uvažujme integrál

$$\int R(x, \sqrt{px^2+qx+r})\,\mathrm{d}x\,.$$

Pokud má polynom px^2+qx+r

- dvojnásobný reálný kořen, pak jde o integraci racionální funkce;
- dva různé reálné kořeny, pak můžeme převést integrál na integrál typu

$$\int R\left(x, \sqrt[q_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[q_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[q_m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,\mathrm{d}x;$$

- komplexní kořeny, pak tento případ snadno převedeme jednoduchými úpravami a lineární substitucí na následující tvar:

$$\int R(x, \sqrt{1+x^2})\,dx,$$

  který dále můžeme počítat s použitím:

  (a) Eulerovy substituce

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{t^2+1}{2t^2}\mathrm{d}t,$$

  která převede daný integrál na integrál z racionální funkce (substituce se někdy píše ve tvaru $\sqrt{1+x^2} = t - x$);

  (b) goniometrické substituce

$$x = \operatorname{tg} t, \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t,$$

  která převede daný integrál na integrál z funkce $R(\cos t, \sin t)$;

(c) hyperbolické substituce

$$x = \sinh t,\ \mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t, \quad \text{nebo} \quad x = \cosh t,\ \mathrm{d}x = \sinh t\,\mathrm{d}t,$$

která převede daný integrál na integrál z funkce $R(\cosh t, \sinh t)$. Ve všech výše uvedených případech používáme Větu 3.2 (*Druhá substituční metoda*).

Příklad 6.3. Vypočtěte primitivní funkci k funkci

$$\frac{1}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Řešení. Funkce je definovaná na množině $(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$. Uvažujme interval $(1, \infty)$ a použijeme Větu 3.2. Pak

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x+4)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{rcl} t &=& \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} \quad x = \frac{4t^2+1}{1-t^2} \\ \mathrm{d}x &=& \frac{10t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| \\
&= \int \frac{(1-t^2)^2}{25t} \cdot \frac{10t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{5}\int dt = \frac{2}{5}t = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + c.
\end{aligned}$$

Integrály typu

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,$$

kde A, B, a, b, $c \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, $a \neq 0$, lze řešit výhodně tak, že je převedeme na součet integrálů

$$K \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x + L \int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x,$$

které již snadno vypočteme.

Příklad 6.4. Vypočtěte primitivní funkci k funkci

$$\frac{x-1}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{\sqrt{2-(x+1)^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\sqrt{1-2x-x^2} - 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c,
\end{aligned}$$

kde $x \in (-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$.

Příklad 6.5. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x+2}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} x+1 &=& u \\ \mathrm{d}x &=& \mathrm{d}u \end{array}\right| \\
&= \int \frac{u+1}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u + \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left|\begin{array}{rcl} 1+u^2 &=& s^2 \\ u\,\mathrm{d}u &=& s\,\mathrm{d}s \end{array}\right| = \int \mathrm{d}s = s = \sqrt{1+u^2} = \sqrt{x^2+2x+2}; \\
I_2 &= \ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}).
\end{aligned}$$

Celkem dostáváme

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+2x+2} + \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + c$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 6.6. Vypočtěte primitivní funkci k funkci

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

na $\mathbb{R}$.

Řešení. Zvolíme Eulerovu substituci podle bodu (a), kde $t \in (0, \infty)$ a použijeme Větu 3.2.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{t^2-1}{2t} \\ \mathrm{d}x &=& \dfrac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(t^2-1)^2}{4t^2}}} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}}} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln t \\
&= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c.
\end{aligned}$$

Příklad 6.7. Vypočtěte primitivní funkci k funkci

$$\sqrt{1+x^2}$$

na $\mathbb{R}$.

Řešení. Zvolíme hyperbolickou substituci podle bodu (c), kde $t \in (-\infty, \infty)$.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{rclcrcl} x &=& \sinh t & & t &=& \operatorname{argsinh} x \\ dx &=& \cosh t dt & & & & \end{array} \right| \\
&= \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\,dt = \int \cosh^2 t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int (1+\cosh 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sinh 2t\right) \\
&= \frac{1}{2}(t+\sinh t\,\cosh t) = \frac{1}{2}\left(t+\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{argsinh} x + x\sqrt{1+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}\right] + c.
\end{aligned}$$

Poznámka 6.1. Předešlý příklad lze též řešit metodou per partes při současném využití výsledku z Příkladu 6.6 tohoto odstavce.

Příklad 6.8. Vypočtěte integrál

$$\int x\sqrt{1-4x-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Daná funkce je definovaná pro $x \in (-2-2\sqrt{5}, -2+2\sqrt{5})$.

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{1-4x-x^2}\,\mathrm{d}x &= \sqrt{5}\int x\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl} \frac{x+2}{\sqrt{5}} &=& u \\ \mathrm{d}x &=& \sqrt{5}\mathrm{d}u \end{array}\right| \\
&= 5\int (\sqrt{5}u-2)\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 5\sqrt{5}\int u\sqrt{1-u^2}\,du - 10\int \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 5\sqrt{5}I_1 - 10I_2,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left|\begin{array}{rcl} 1-u^2 &=& s^2 \\ u\,\mathrm{d}u &=& s\,\mathrm{d}s \end{array}\right| = -\int s^2\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{3}s^3 = -\frac{1}{3}(1-u^2)\sqrt{1-u^2} \\
&= -\frac{1}{15\sqrt{5}}(1-4x-x^2)\sqrt{1-4x-x^2}, \\
I_2 &= \int \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Dle Příkladu 3.2 pak máme

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}\left(\arcsin u + u\sqrt{1-u^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{x+2}{5}\sqrt{1-4x-x^2}\right].
\end{aligned}$$

Celkem dostáváme

$$\begin{aligned}
&\int x\sqrt{1-4x-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-4x-x^2)^3} - (x+2)\sqrt{1-4x-x^2} - 5\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}} + c
\end{aligned}$$

pro $x \in (-2-2\sqrt{5}, -2+2\sqrt{5})$.

Příklad 6.9. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x^5}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Integrovaná funkce je definovaná pro $x \in (-1, 1)$.

$$\begin{aligned}
I &= \left|\begin{array}{rcl} 1-x^2 &=& u^2, \\ x\,\mathrm{d}x &=& -u\,\mathrm{d}u \end{array}\right| = \int \frac{(1-u^2)^2}{u^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}u^3 - 2u - \frac{1}{u} + c \\
&= \frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c
\end{aligned}$$

Cvičení 6.1. Spočtěte dané integrály na daných oborech:

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (0,\infty)\,;$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (0,1)\,;$

c) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (-1,1)\,;$

d) $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (-3,1)\,;$

e) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (-1,\infty)\,;$

f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R}.$

7 Kontrolní otázky.

- Definujte primitivní funkci a neurčitý integrál a uveďte jejich základní vlastnosti.
- Znáte nějaké neelementární integrály? V čem spočívá jejich neelementárnost?
- Uveďte větu o integraci metodou per partes.
- Čím se liší 1. a 2. substituční metoda? Zformulujte znění odpovídajících vět.
- Vysvětlete myšlenkový postup výpočtu primitivní funkce k parciálním zlomkům tvaru
$$\frac{Bx + C}{(px^2 + qx + r)^k},$$
kde polynom ve jmenovateli má komplexní kořeny.
- Vysvětlete postup při integraci racionální funkce.
- Odvoďte rekurentní vztah pro výpočet integrálu
$$\int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k}\,\mathrm{d}t.$$
- Co je cílem substitucí při řešení $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$?
- Jak se řeší integrály typu $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \,\mathrm{d}x$ apod. ?
- Odvoďte, čemu se rovná $\sin x$, $\cos x$ při substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.
- Popište postup při řešení integrálů tvaru
$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,\mathrm{d}x.$$
- Jak lze vypočítat integrály tvaru $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x$?

8 Autotest.

Spočtěte dané integrály na daných oborech:

1) $\displaystyle\int \frac{3+\ln x}{x\sqrt[3]{\ln x - 4}}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \left(0, \mathrm{e}^4\right);$

2) $\displaystyle\int e^{-2x} \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R};$

3) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right);$

4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (0, 2);$

5) $\displaystyle\int \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin^3 x \cos x}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

6) $\displaystyle\int \frac{(2^x - 3^x)^2}{6^x}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R};$

7) $\displaystyle\int \frac{2\ln x + 7}{x\left(\ln^2 x + \ln x - 2\right)}\,\mathrm{d}x \quad \text{na ;}$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } (-\infty, -1);$

9) $\displaystyle\int \cos(3x-1)\cos\frac{x+2}{3}\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R};$

10) $\displaystyle\int x^2\cos^2 x\,\mathrm{d}x \quad \text{na } \mathbb{R}.$

9 Výsledky cvičení a autotestu.

Cvičení 2.1.

a) $\displaystyle\frac{x^4}{4} - \ln|x| + \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} + 18\sqrt[3]{x} + c;$

b) $\displaystyle\frac{2\sqrt{x}}{45}(5x^4 - 27x^2 - 45) + c;$

c) $\displaystyle\frac{x}{3}\left(2\sqrt{x} - 3\right) + c;$

d) $x + \cos x + c;$

e) $\displaystyle\frac{x - \sin x}{2} + c;$

f) $\operatorname{tg} x - x + c.$

Cvičení 3.1.

a) $-\frac{1}{4}\ln|3-4x|+c=-\frac{1}{4}\ln(4x-3)+c \quad \text{pro x} \in \left(\frac{3}{4},\infty\right);$

b) $\frac{1}{3\cos^3 x}+c;$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{(5+x^2)^3}-5\sqrt{5+x^2}+c;$

d) $\frac{1}{4}\arcsin^4 x+c;$

e) $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5}+c;$

f) $\arcsin\frac{x+2}{3}+c.$

Cvičení 3.2.

a) $\frac{x\sin(4x+3)}{4}+\frac{\cos(4x+3)}{16}+c;$

b) $\frac{1}{8}(2x^2-2x\sin 2x-\cos 2x)+c;$

c) $x\log x-\frac{x}{\ln 10}+c;$

d) $x\operatorname{arctg}3x-\frac{1}{6}\ln\left(1+9x^2\right)+c;$

e) $\frac{e^{2x}}{29}(5\sin 5x+2\cos 5x)+c;$

f) $-\frac{\ln^2 x}{2x^2}-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+c.$

Cvičení 4.1.

a) $2\ln\left(x^2+5x+7\right)-\frac{22}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{3}}+c;$

b) $\frac{5}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+2|+c;$

c) $x-\frac{1}{2x^2}+\ln\frac{|x^3|}{|x-2|}+c;$

d) $\ln\frac{|x^2+x+1|}{|x|}+c;$

e) $\ln x^2\sqrt{x^2-2x+2}+c;$

f) $\dfrac{5}{2}\ln\left|\ln^2 x - \ln x + 1\right| + \dfrac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\ln x - 1}{\sqrt{3}} + c.$

Cvičení 5.1.

a) $\operatorname{arctg}(\cos x) - \cos x + c;$

b) $-\dfrac{\cos^2 x}{2} + \dfrac{2\cos^3 x}{3} - \dfrac{\cos^4 x}{4} + c;$

c) $\dfrac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + c;$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + c;$

e) $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3}\right| + c;$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{5}} + c.$

Cvičení 6.1.

a) $x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x} + 1) + c;$

b) $4\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 24\sqrt[12]{x} + 24\ln|\sqrt[12]{x} - 1| + c;$

c) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + c;$

d) $-\sqrt{3 - 2x - x^2} - 4\arcsin\left(\dfrac{x+1}{2}\right) + c;$

e) $\dfrac{1}{4}(2x+4)\sqrt{x^2+4x+3} - \dfrac{1}{2}\ln\left(x + 2 + \sqrt{x^2+4x+3}\right) + c;$

f) $-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2x + 1 + \sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}} + \sqrt{x^2+x+1} + c.$

Autotest. 8

1) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{(\ln x - 4)^5} + \dfrac{21}{2}\sqrt[3]{(\ln x - 4)^2} + c;$

2) $\dfrac{-e^{-2x}}{13}(3\cos(3x+2) + 2\sin(3x+2)) + c;$

3) $\sin x + \cos x + c;$

4) $\arcsin(x - 1) + c;$

5) $-\dfrac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+\dfrac{2}{\operatorname{tg} x}+\ln|\operatorname{tg} x|+c;$

6) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}-2x+c;$

7) $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)\right)+c;$

8) $\dfrac{5}{4}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{4/5}-\dfrac{5}{9}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{9/5}+c;$

9) $\dfrac{3}{20}\sin\dfrac{10x-1}{3}+\dfrac{3}{16}\sin\dfrac{8x-5}{3}+c;$

10) $\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{4}x^2\sin 2x+\dfrac{1}{4}x\cos 2x-\dfrac{1}{8}\sin 2x+c.$

10 Studijní prameny.

[1] Bourbaki, N.: *Funkcii dejstvitelnovo peremennovo.* Moskva 1965.

[2] Brabec, J., Hrůza, B.: *Matematická analýza* I. SNTL, Praha 1985.

[3] Daněček, J., Dlouhý, O., Koutková, H., Prudilová, K., Sekaninová, J., Slatinský, E.: *Sbírka příkladů z matematika* I. VUT FAST Cerm, Brno 2000.

[4] Fichtengolc, G. M.: *Kurz diferencialnovo i integralnovo iscislenija* II. Nauka, Moskva 1951.

[5] Milota, J.: *Matematická analýza* I–II. SPN, Praha 1978.

[6] Prudnikov, A. P., Bryčkov, J. A., Maričev, O. I.: *Integrály i rjady.* Nauka, Moskva 1981.

[7] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užité matematiky* I. Prometheus, Praha 1995.

[8] Schwabik, Š.: *Integrace v R. Kurzweilova teorie.* Karolinum, UK Praha 1999.

[9] Škrášek, J., Tichý, Z.: *Základy aplikovákované matematiky* II. SNTL, Praha 1986.

[10] Ungermann Z.: *Matematika a řešení fyzikálních úloh.* SPN, Praha 1990.

A Vzorová zadání kontrolních testů.

Matematika, 1. semestr	Zpracoval:
Test č. 3	Jméno: ....
	Adresa: ....

1. Vhodnými úpravami vypočtěte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{1+\sin^2 x+2\cos^2 x}{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{3x^4-7x^2+5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

2. Vhodnou substitucí řešte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+6x-3x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{5}{x(3-5\ln x)}\,\mathrm{d}x$

3. Metodou per partes vypočtěte:

a) $\displaystyle\int (x-1)^2\sin(2x-1)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \arcsin^2 x\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \sqrt{3+4x-x^2}\,\mathrm{d}x$

př.	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	3e	$\sum$	opravil(a)
max. bodů	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	36	
zís. bodů															

Matematika, 1. semestr	Zpracoval:
Test č. 4	Jméno: ....
	Adresa: ....

1. Vypočtěte integrály racionálních funkcí:

   a) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-7}{x^4+2x^2-8x+5}\,\mathrm{d}x$

2. Vhodnými substitucemi řešte integrály:

   a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$

   e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^5 x\cdot\cos^5 x}\,\mathrm{d}x$

př.	1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d	2e	$\sum$	opravil(a)
max. bodů	4	4	4	4	4	4	4	4	32	
zís. bodů										